

期末测试卷(2)

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____

一、选择题(本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中是二次函数的是 (D)

A. $y = \frac{2}{x^2}$ B. $y = (x+3)^2 - x^2$ C. $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ D. $y = x(x-1)$

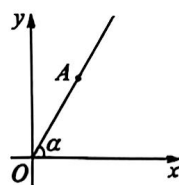
2. 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 内有一点 $A(2, 3)$, 那么 OA 与 x 轴正半轴的夹角 α 的余切值是 (B)

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$



第 2 题图

3. 将抛物线 $y = (x+1)^2 - 3$ 向右平移 2 个单位后得到的新抛物线的表达式为 (A)

A. $y = (x-1)^2 - 3$

B. $y = (x+3)^2 - 3$

C. $y = (x+1)^2 - 1$

D. $y = (x+1)^2 - 5$

4. 下列命题正确的是 (C)

A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. 如果 $\vec{a} = k\vec{b}$ ($k \neq 0$), 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 如果 $m=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$, 那么 $m\vec{a}=\vec{0}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, $AD : DB = 4 : 5$, 下列结论中正确的是 (B)

A. $\frac{DE}{BC} = \frac{4}{5}$

B. $\frac{BC}{DE} = \frac{9}{4}$

C. $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{5}$

D. $\frac{EC}{AC} = \frac{5}{4}$

6. 如果点 D, E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, AC 上, 联结 DE, EF , 且 $DE \parallel AC$, 那么下列说法错误的是 (C)

A. 如果 $EF \parallel AB$, 那么 $AF : AC = BD : AB$

B. 如果 $AD : AB = CF : AC$, 那么 $EF \parallel AB$

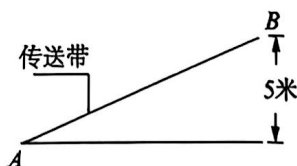
C. 如果 $\triangle EFC \sim \triangle BAC$, 那么 $EF \parallel AB$

D. 如果 $EF \parallel AB$, 那么 $\triangle EFC \sim \triangle BDE$

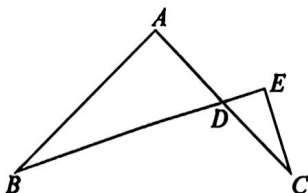
二、填空题(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 5\vec{a} - \vec{b}$.

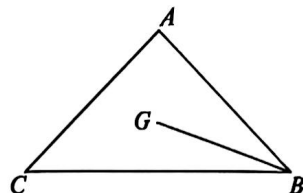
8. 如果 $\frac{x}{x-y} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{x}{y}$ 的值等于 3.
9. 已知点 P 在线段 AB 上, 且满足 $BP^2 = AB \cdot AP$, 则 $\frac{BP}{AB}$ 的值等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
10. 已知抛物线 $y = (1+\alpha)x^2$ 的开口向上, 则 α 的取值范围是 $\alpha > -1$.
11. 抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 在 y 轴左侧的部分是 下降. (填“上升”或“下降”)
12. 如果一条抛物线经过点 $A(2, 5)$, $B(-3, 5)$, 那么它的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$.
13. 如图, 传送带把物体从地面送到离地面 5 米高的地方, 如果传送带与地面所成的斜坡的坡度 $i = 1:2.4$, 那么物体所经过的路程 AB 为 13 米.
14. 如图, AC 与 BE 交于点 D , $\angle A = \angle E = 90^\circ$, 若点 D 是线段 AC 的中点, 且 $AB = AC = 10$, 则 BE 的长等于 $6\sqrt{5}$.
15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 G 是重心, $AC = 4$, $\tan \angle ABG = \frac{1}{3}$, 则 BG 的长是 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.



第 13 题图

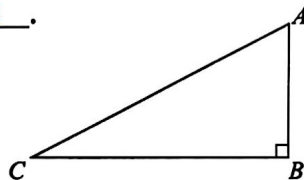


第 14 题图



第 15 题图

16. 已知相交两圆的半径长分别为 8 与 15, 圆心距为 17, 则这两圆的公共弦长为 $\frac{240}{17}$.
17. 如果直线 l 把 $\triangle ABC$ 分割后的两个部分面积相等, 且周长也相等, 那么就称直线 l 叫做 $\triangle ABC$ 的“完美分割线”. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\triangle ABC$ 的一条“完美分割线”为直线 l , 且直线 l 平行于 BC , 若 $AB = 2$, 则 BC 的长等于 $4\sqrt{2} - 4$.
18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$, 点 P 在边 BC 上, 联结 AP , 将 $\triangle ABP$ 绕着点 A 旋转, 使得点 P 与边 AC 的中点 M 重合, 点 B 的对应点是点 B' , 则 BB' 的长等于 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.



第 18 题图

三、解答题(本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

计算: $\frac{\sin 30^\circ \cdot \tan^2 60^\circ - \cot 45^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ - \sin^2 45^\circ}$.

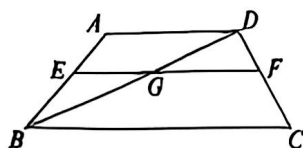
解: 原式 = $\frac{\frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 - 1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \sqrt{3} + 1$$

20. (本题满分 10 分,第(1)小题 6 分,第(2)小题 4 分)

如图,在梯形 $ABCD$ 中,点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上, $AD \parallel EF \parallel BC$, EF 与 BD 交于点 G , $AD=5$, $BC=10$, $\frac{AE}{EB}=\frac{2}{3}$.



第 20 题图

(1) 求 EF 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DB} =$ _____; $\overrightarrow{FC} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

解: (1) $\because \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3} \therefore \frac{AB}{EB} = \frac{5}{3}, \frac{AE}{AB} = \frac{2}{5}$
 $\because EF \parallel AD \therefore \frac{AD}{EG} = \frac{AB}{EB}$
 $\because AD=5 \therefore \frac{5}{EG} = \frac{5}{3} \therefore EG=3$
 $\because EF \parallel BC \therefore \frac{GF}{BC} = \frac{DF}{DC}$ 又 $\because AD \parallel EF \parallel BC \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC}$
 $\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AE}{AB}$
 $\because BC=10 \therefore \frac{GF}{10} = \frac{2}{5} \therefore GF=4$
 $\therefore EF=EG+GF=3+4=7$
 (2) $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{FC} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b}$

21. (本题满分 10 分,其中第(1)小题 3 分,第(2)小题 3 分,第(3)小题 4 分)

已知在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=x^2+bx+1$ (b 为常数)的对称轴是直线 $x=1$.

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 点 $A(8, m)$ 在该抛物线上,它关于该抛物线对称轴对称的点为 A' ,求点 A' 的坐标;

(3) 选取适当的数据填入下表,并在如图所示的平面直角坐标系内描点,画出该抛物线.

(1) $\because$ 对称轴为 $x=-\frac{b}{2} \therefore -\frac{b}{2}=1$.

$\therefore b=-2$.

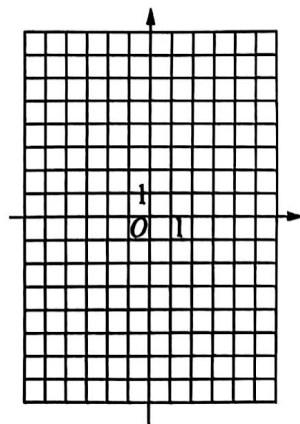
$\therefore y=x^2-2x+1$.

(2) $\because$ 点 $A(8, m)$ 在该抛物线的图像上, $\therefore$ 当 $x=8$ 时, $y=x^2-2x+1=(x-1)^2=(8-1)^2=49$.

$\therefore$ 点 $A(8, 49)$ 关于对称轴对称的点 A' 的坐标为 $(-6, 49)$.

(3) 表格正确,得 2 分;图正确得 2 分.

x	...						...
y	...						...



第 21 题图

22. (本题满分10分,其中第(1)小题7分,第(2)小题3分)

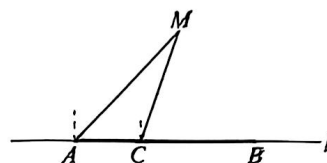
如图,在东西方向的海岸线 l 上有长为 300 米的码头 AB ,在码头的最西端 A 处测得轮船 M 在它的北偏东 45° 方向上;同一时刻,在 A 点正东方向距离 100 米的 C 处测得轮船 M 在北偏东 22° 方向上.

(1) 求轮船 M 到海岸线 l 的距离;(结果精确到 0.01 米)

(2) 如果轮船 M 沿着南偏东 30° 的方向航行,那么该轮船能否行至码头 AB 靠岸? 请说明理由.

(参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.375$, $\cos 22^\circ \approx 0.927$, $\tan 22^\circ \approx$

0.404 , $\sqrt{3} \approx 1.732$.)



第 22 题图

解: (1) 过点 M 作 $MD \perp AC$ 交 AC 的延长线于 D , 设 $DM = x$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CDM$ 中,

$$CD = DM \cdot \tan \angle CMD = x \cdot \tan 22^\circ,$$

又 $\therefore$ 在 $Rt\triangle ADM$ 中, $\angle MAC = 45^\circ$,

$$\therefore AD = DM,$$

$$\therefore AD = AC + CD = 100 + x \cdot \tan 22^\circ,$$

$$\therefore 100 + x \cdot \tan 22^\circ = x.$$

$$\therefore x = \frac{100}{1 - \tan 22^\circ} \approx \frac{100}{1 - 0.404} \approx 167.785$$

$$\approx 167.79.$$

答: 轮船 M 到海岸线 l 的距离约为 167.79 米.

(2) 作 $\angle DMF = 30^\circ$ 交 l 于点 F ,

在 $Rt\triangle DMF$ 中.

$$\therefore DF = DM \cdot \tan \angle FMD$$

$$= DM \cdot \tan 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} DM$$

$$\approx \frac{1.732}{3} \times 167.79$$

$$\approx 96.87 \text{ 米}$$

$$\therefore AF = AC + CD + DF = DM + DF$$

$$\approx 167.79 + 96.87$$

$$= 264.66 < 300$$

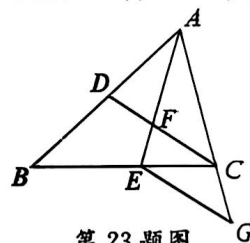
所以该轮船能行至码头靠岸.

23. (本题满分12分,第(1)小题5分,第(2)小题7分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上, AE 与 CD 交于点 F . 若 AE 平分 $\angle BAC$, $AB \cdot AF = AC \cdot AE$.

(1) 求证: $\angle AFD = \angle AEC$;

(2) 若 $EG \parallel CD$, 交边 AC 的延长线于点 G , 求证: $CD \cdot CG = FC \cdot BD$.



第 23 题图

证明: (1) $\because AB \cdot AF = AC \cdot AE$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$$

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF$$

$$\therefore \angle B = \angle ACF$$

$$\text{又} \because \angle AFD = \angle ACF + \angle CAF,$$

$$\angle AEC = \angle B + \angle BAE$$

$$\therefore \angle AFD = \angle AEC$$

(2) $\because \angle AFD = \angle AEC$, $\angle AFD =$

$$\angle CFE \therefore \angle CFE = \angle AEC$$

$$\therefore FC = CE$$

$\because EG \parallel CD$

$$\therefore \angle DCB = \angle CEG \quad \angle ACF = \angle G$$

$$\text{又} \because \angle ACF = \angle B \therefore \angle B = \angle G$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle GEC$$

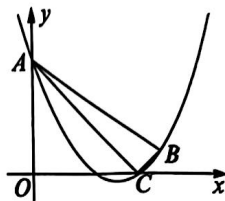
$$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{CG}$$

$$\therefore \frac{CD}{FC} = \frac{BD}{CG}$$

$$\text{即 } CD \cdot CG = FC \cdot BD.$$

24. (本题满分 12 分, 每小题 4 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + mx + n$ 经过点 $B(6, 1)$ 、 $C(5, 0)$, 且与 y 轴交于点 A .



第 24 题图

- (1) 求抛物线的表达式及点 A 的坐标;
- (2) 点 P 是 y 轴右侧抛物线上的一点, 过点 P 作 $PQ \perp OA$, 交线段 OA 的延长线于点 Q , 如果 $\angle PAB = 45^\circ$, 求证: $\triangle PQA \sim \triangle ACB$;
- (3) 若点 F 是线段 AB (不包含端点) 上的一点, 且点 F 关于 AC 的对称点 F' 恰好在上述抛物线上, 求 FF' 的长.

解: (1) $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + mx + n$ 过点 $B(6, 1)$ 、 $C(5, 0)$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{3} \times 6^2 + 6m + n = 1 \\ \frac{1}{3} \times 5^2 + 5m + n = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = -\frac{8}{3} \\ n = 5 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 5$$

令 $x=0$ 得 $y=5$, $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 5)$

(2) $\because A(0, 5), B(6, 1), C(5, 0)$

$$\therefore AC = 5\sqrt{2}, BC = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 \therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{又} \because PQ \perp OA \therefore \angle PQA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PQA = \angle ACB$$

$$\because A(0, 5), C(5, 0) \therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle AOC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle QAP + \angle PAB + \angle BAC + \angle CAO = 180^\circ, \angle PAB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle QAP = \angle BAC = 90^\circ \therefore \angle ABC$$

$$+ \angle BAC = 90^\circ \therefore \angle QAP = \angle ABC$$

$$\therefore \triangle PQA \sim \triangle ACB$$

(3) 设点 B' 是点 B 关于直线 AC 的对称点, 则 $B'C = BC = \sqrt{2}$, $\angle ACB' = \angle ACB = 90^\circ$

过点 B 作 $B'G \perp x$ 轴, 垂足为点 G

$$\because \angle B'CO + \angle OCA = 90^\circ, \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B'CO = 45^\circ \therefore \angle B'G = GC = 1$$

$$\therefore B'(4, -1)$$

$\because$ 点 F' 同时在线段 AB' 与抛物线上,

$$\therefore \text{设 } F'\left(x, \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 5\right)$$

分别过点 F', B' 作 $F'H \perp y$ 轴, $B'H' \perp y$ 轴, 垂足分别为 H, H' , 则 $F'H \parallel B'H'$

$$\therefore \frac{AF'}{AB'} = \frac{F'H}{B'H'} = \frac{AH}{AH'}$$

$$\text{即 } \frac{x}{4} = \frac{\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}x^2}{6} \therefore x = \frac{7}{2}$$

又 $\because FF' \perp AC, BB' \perp AC$

$$\therefore FF' \parallel BB' \therefore \frac{AF'}{AB'} = \frac{FF'}{BB'}$$

$$\therefore \frac{FF'}{BB'} = \frac{F'H}{B'H'} = \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{7}{8}$$

$$\because BB' = 2BC = 2\sqrt{2}$$

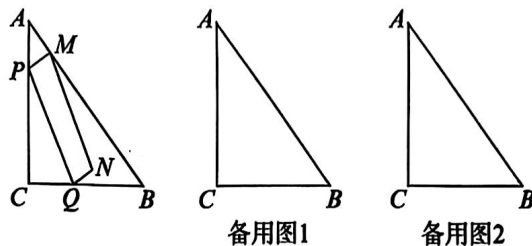
$$\therefore \frac{FF'}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{8} \therefore FF' = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

25. (本题满分 14 分,第(1)小题 4 分,第(2)小题 6 分,第(3)小题 4 分)

如图,已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, 点 P 、 Q 分别在边 AC 、射线 CB 上,且 $AP=CQ$,过点 P 作 $PM\perp AB$,垂足为点 M ,联结 PQ . 以 PM 、 PQ 为邻边作平行四边形 $PQNM$. 设 $AP=x$,平行四边形 $PQNM$ 的面积为 y .

- (1) 当平行四边形 $PQNM$ 为矩形时,求 $\angle PQM$ 的正切值;
- (2) 当点 N 在 $\triangle ABC$ 内,求 y 关于 x 的函数解析式,并写出它的定义域;
- (3) 当过点 P 且平行于 BC 的直线经过平行四边形 $PQNM$ 一边的中点时,直接写出 x 的值.

解: (1) $\because$ 四边形 $PQNM$ 是矩形 $\therefore \angle MPQ = 90^\circ$
 $\because PM\perp AB, \therefore \angle PMB=90^\circ$
 $\therefore \angle MPQ + \angle PMB = 180^\circ \therefore PQ\parallel AB$
 $\therefore \angle A = \angle CPQ$
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=8, BC=6, \therefore AB=10, \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PMA$ 中, $\angle AMP=90^\circ, PM = AP \cdot \sin A = \frac{3}{5}AP$
 在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中, $\angle C=90^\circ, PQ = \frac{CQ}{\sin \angle CPQ} = \frac{5}{3}CQ$
 $\because AP=CQ \therefore PQ = \frac{5}{3}AP$
 $\therefore \tan \angle PQM = \frac{PM}{PQ} = \frac{\frac{3}{5}AP}{\frac{5}{3}AP} = \frac{9}{25}$



第 25 题图

- (2) 过点 Q 作 $QH\perp AB$,垂足为点 H
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=8, BC=6, AB=10$
 $\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PMA$ 中, $\angle AMP=90^\circ, AM = AP \cdot \cos A = \frac{4}{5}AP = \frac{4}{5}x$
 在 $\text{Rt}\triangle BHQ$ 中, $\angle BHQ=90^\circ, BQ = BC - CQ = 6 - x$
 $\therefore BH = BQ \cdot \cos B = \frac{3}{5}(6 - x)$
 $\therefore MH = AB - AM - BH = 10 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}(6 - x) = \frac{32}{5} - \frac{1}{5}x$
 由(1)知, $PM = \frac{3}{5}x$,
 $\therefore y = PM \cdot MH = \frac{3}{5}x \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}x \right) = \frac{96}{25}x - \frac{3}{25}x^2 \quad (0 < x < \frac{24}{7})$
- (3) $\frac{200}{43}$ 或 $\frac{400}{59}$